椭圆、双曲线的两个斜率积为定值问题探讨

一．结论生成，构建数学模型

问题1：已知点*A,B*的坐标分别为，，直线*AP*，*BP*相交于点*P*，且它们的斜率之积是*m*，其中, 求点*P*的轨迹方程.并讨论轨迹。

【解析】设点*P*的坐标为，因为点*A*的坐标是，

所以直线*AP*的斜率同理，直线*BP*的斜率

由已知得，化简，得点*M*的轨迹方程为

当点P的轨迹为焦点在轴上的双曲线，不包括点A,B

当点P的轨迹椭圆，不包括点A,B

问题2：已知椭圆，线段AB为其长轴，点P是椭圆上除点A、B外的任意一点，则为定值吗？



【解析】设，则，所以

又，，所以

观察猜想得

问题3：已知椭圆，*AB*为长轴，若*P*为椭圆上除*A,B*外的任意一点，则为定值吗？

思路一：从特殊到一般（问题2的推广）

【证明】设为椭圆上任一点，定点*A*，*B*的坐标分别为，，

所以直线*PA*和*PB*的斜率分別为，，

又在椭圆上，故，所以

思路二：回归椭圆第三定义的推导过程（详见椭圆的三种定义及其轨迹问题）

【证明】请看③式逐级变形如下











上式的几何意义为，平面内动点与两定点连线的斜率之积为负常数

**椭圆的第三定义: 平面内与两定点连线的斜率之积为一负常数 (除-1外) 的动点轨迹为椭圆(不含两定点)．**

思路三：利用参数方程去证明

【证明】设因为，，

所以故答案为

问题4：已知椭圆，*AB*为过中心*O*的任意一条弦，若*P*为椭圆上除*A,B*外的任意一点，则为定值吗（斜率存在的前提下）？



【分析】联想到点差法！

【证明】设则，且①，②，

两式相减得：则，

，是与点*P*位置无关的定值.

再探究：从形的角度解释得易

这也是我们在中点弦与点差法中常用手段，在后面安排的数学模型应用中，主要就是通过斜率的等价，对称等条件的变换，回归到此二级结论中迅速解题。

 

总结如下

1．椭圆的第三定义：如图1所示，设椭圆的左、右顶点分别为*A*和*B*，点*P*为椭圆*C*上不与*A*、*B*重合的动点，则直线、的斜率之积.

推广：如图2所示，*A*、*B*为椭圆上关于原点对称的任意两点，*P*为椭圆*C*上的动点且直线、的斜率均存在，则直线、的斜率之积

2．椭圆中点弦结论：如图3所示，设是椭圆的任意一条不垂直于坐标轴且不过原点的弦，*M*为的中点，则直线与直线的斜率之积.



问题5：若椭圆的方程为，点*A*、*B*分别是椭圆上关于原点对称的两点，点*P*是椭圆上不同于点*A*和*B*的任意一点．若直*PA*与*PB*的斜率都存在，分别记为那么与之积是与点*P*无关的定值

试对双曲线写出具有类似特点的正确结论，并加以证明．

【证明】双曲线类似的结论为：已知双曲线，

点*A*，*B*是双曲线上关于原点对称的两点，点*P*是双曲线上不同于点*A*和点*B*的任意一点，

直线*PA*的斜率与直线*PB*的斜率之积为定值

证明：设则，且①，②，

两式相减得：则，

，是与点*P*位置无关的定值.

类比总结如下：

双曲线的第三定义：如图4所示，设*A*、*B*分别为双曲线的左、右顶点，*P*为双曲线上不同于*A*、*B*的任意一点，则直线、的斜率之积

推广：如图5所示，设*A*、*B*为双曲线上关于原点*O*对称的任意两点，*P*为双曲线*C*上的动点，且、的斜率都存在，则直线、的斜率之积

双曲线中点弦结论：如图6所示，设是双曲线的不垂直于坐标轴且不过原点的弦，*M*为中点，则直线与直线的斜率之积.



提醒：若是焦点在*y*轴上的椭圆或双曲线，则上述四个斜率积的结果都要取倒数.

二．数学模型应用

1.已知椭圆，*AB*为过中心*O*的一条弦，*P*为椭圆上的一点，且*AP*⊥*AB,*则

【分析】,,

1. 变式：已知椭圆，AB为过中心O的一条弦，AH垂直于x轴于H点，直线BH交椭圆于另一点，则



【分析】设则,

,，

3.变式：（2022年甲卷理科第10题）椭圆的左顶点为，点，均在上，且关于轴对称．若直线，的斜率之积为，则的离心率为（ ）

 A． B． C． D．



【答案】A

【解析】椭圆的右顶点为，由于点，均在上，且关于轴对称，所以直线，也关于轴对称，即，，．

4变式：已知椭圆的左右顶点分别为*A*和*B*，直线*l*过点*B*且与*x*轴垂直，*P*为椭圆*C*上不与*A*、*B*重合的动点，直线与直线*l*交于点*M*，且，则椭圆*C*的离心率为\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】如图，不妨设*P*在*x*轴上方，设直线、的斜率分别为、，由椭圆第三定义，，由图可知，

因为，所以，从而，即，解得：.



思考探究：已知椭圆的左、右顶点分别为*A*、*B*，若椭圆*C*上存在不与*A*、*B*重合的点*P*，使得，则椭圆*C*的离心率的取值范围是\_\_\_\_\_\_.

【解析】如图，不妨设*P*在*x*轴上方，，记，，则，所以，

从而①，

由椭圆第三定义，，所以，

代入①可得，显然，均为锐角，

所以，，

从而，

当且仅当时取等号，

故，结合可解得：.



【答案】

三：拓展研究

**在圆锥曲线(椭圆、双曲线、抛物线)中,曲线上的一定点(非顶点)与曲线上的两动点,满足直线与的斜率互为相反数(倾斜角互补),则直线的斜率为定值.**

**1、在椭圆中：已知椭圆,定点()在椭圆上,设,是椭圆上的两个动点,直线，的斜率分别为,,且满足.则直线的斜率**

**2、在双曲线:中，定点()在双曲线上,设,是双曲线上的两个动点,直线,的斜率分别为，,且满足.则直线的斜率**

**3、在抛物线：，定点()在抛物线上,设,是抛物线上的两个动点,直线,的斜率分别为,,且满足.则直线的斜率.**

补充：

过椭圆$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$ $(a>0, b>0)$上任一点$A(x\_{0},y\_{0})$任意作两条倾斜角互补的直线交椭圆于$B,C$两点，则直线$BC$有定向且$k\_{BC}=\frac{b^{2}x\_{0}}{a^{2}y\_{0}}$(常数).



**证明** 设$B\left(x\_{1},y\_{1}\right),C\left(x\_{2},y\_{2}\right)$，直线$AB$的斜率为$k$，不妨设$k>0$，

则直线$AB$的方程为$y=k\left(x−x\_{0}\right)+y\_{0}$

代入$\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$，得$\left(b^{2}+a^{2}k^{2}\right)x^{2}+2a^{2}k\left(y\_{0}−kx\_{0}\right)x+\left(y\_{0}−kx\_{0}\right)^{2}−a^{2}b^{2}=0$，

$∴x\_{1}+x\_{0}=\frac{2a^{2}k\left(kx\_{0}−y\_{0}\right)}{b^{2}+a^{2}k^{2}}⇒ x\_{1}=\frac{a^{2}k^{2}x\_{0}−2ka^{2}y\_{0}−b^{2}x\_{0}}{b^{2}+a^{2}k^{2}}$，

$∴y\_{1}=k\left(x\_{1}−x\_{0}\right)+y\_{0}=\frac{b^{2}y\_{0}−a^{2}k^{2}y\_{0}−2kb^{2}x\_{0}}{b^{2}+a^{2}k^{2}}$，

由于直线$AB$与直线$AC$的倾斜角互补，所以$k\_{AC}=−k$，

同理$x\_{2}=\frac{a^{2}k^{2}x\_{0}+2ka^{2}y\_{0}−b^{2}x\_{0}}{b^{2}+a^{2}k^{2}},y\_{2}=\frac{b^{2}y\_{0}−a^{2}k^{2}y\_{0}+2kb^{2}x\_{0}}{b^{2}+a^{2}k^{2}}$，

$∴k\_{BC}=\frac{y\_{2}−y\_{1}}{x\_{2}−x\_{1}}=\frac{b^{2}x\_{0}}{a^{2}y\_{0}}$ ，

$∵x\_{2}−x\_{1}=\frac{4ka^{2}y\_{0}}{b^{2}+a^{2}k^{2}}$，$∴x\_{2}−x\_{1}$的正负是确定的，即直线$BC$有定向.

过双曲线$\frac{x^{2}}{a^{2}}−\frac{y^{2}}{b^{2}}=1(a>0,b>0)$上任一点$A(x\_{0},y\_{0})$任意作两条倾斜角互补的直线交双曲线于$B,C$两点，则直线$BC$有定向且$k\_{BC}=−\frac{b^{2}x\_{0}}{a^{2}y\_{0}}$(常数).



**证明** 设$B\left(x\_{1},y\_{1}\right),C\left(x\_{2},y\_{2}\right)$，直线$AB$的斜率为$k$，不妨设$k>0$，则直线$AB$的方程为$y=k\left(x−x\_{0}\right)+y\_{0}$，代入$\frac{x^{2}}{a^{2}}−\frac{y^{2}}{b^{2}}=1$，得$\left(b^{2}−a^{2}k^{2}\right)x^{2}−2a^{2}k\left(y\_{0}−kx\_{0}\right)x−\left(y\_{0}−kx\_{0}\right)^{2}−a^{2}b^{2}=0$，

$∴x\_{1}+x\_{0}=\frac{2a^{2}k\left(y\_{0}−kx\_{0}\right)}{b^{2}−a^{2}k^{2}}⇒ x\_{1}=\frac{−a^{2}k^{2}x\_{0}−b^{2}x\_{0}+2ka^{2}y\_{0}}{b^{2}−a^{2}k^{2}}$，

$∴y\_{1}=k\left(x\_{1}−x\_{0}\right)+y\_{0}=\frac{b^{2}y\_{0}+a^{2}k^{2}y\_{0}−2kb^{2}x\_{0}}{b^{2}−a^{2}k^{2}}$，

由于直线$AB$与直线$AC$的倾斜角互补，所以$k\_{AC}=−k$，

同理$x\_{2}=\frac{−a^{2}k^{2}x\_{0}−b^{2}x\_{0}−2ka^{2}y\_{0}}{b^{2}−a^{2}k^{2}},y\_{2}=\frac{b^{2}y\_{0}+a^{2}k^{2}y\_{0}+2kb^{2}x\_{0}}{b^{2}−a^{2}k^{2}}$，$∴k\_{BC}=\frac{y\_{2}−y\_{1}}{x\_{2}−x\_{1}}=−\frac{b^{2}x\_{0}}{a^{2}y\_{0}}$，

$∵x\_{2}−x\_{1}=\frac{4ka^{2}y\_{0}}{a^{2}k^{2}−b^{2}}$，$∴x\_{2}−x\_{1}$的正负是确定的，即直线$BC$有定向.

拓展练习

1.已知点在抛物线上，过点作两条斜率互为相反数的直线交抛物线于、两点，若直线的斜率为，则点坐标为（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】设点、、，则直线的斜率为，可得，同理可得直线的斜率为，直线的斜率为，

，所以，，则，，

因此，点的坐标为.故选：A.

**另解：在抛物线：，定点()在抛物线上,设,是抛物线上的两个动点,直线,的斜率分别为,,且满足.则直线的斜率.利用此二级结论：，，再回代入得到.**

**【反思】特别提醒，本题抛物线方程巧合是二级结论中的型抛物线，若是型抛物线，则结论.**

2.设抛物线：的焦点为，点在上，且，若过上一个定点引它的两条弦，，直线，的斜率存在且倾斜角互为补角，则直线的斜率是（       ）

A． B． C． D．

【答案】A

【详解】因为点在上，且，所以，，抛物线方程为.

设，，则有，，.

于是，

所以.因此直线的斜率.故选：A.

**另解：由题意知：定点()在抛物线上,设,是抛物线上的两个动点,直线,的斜率分别为,,且满足.则直线的斜率，代入答案选A.**

**【反思】注意使用前先判断二级结论是否适用，先判定，后使用.**

3．已知椭圆的左，右焦点为，椭圆的离心率为，点在椭圆*C*上．(1)求椭圆*C*的方程；(2)点*T*为椭圆*C*上的点，若点*T*在第一象限，且与*x*轴垂直，过*T*作两条斜率互为相反数的直线分别与椭圆*C*交于点*M*，*N*，探究直线的斜率是否为定值？若为定值，请求之；若不为定值，请说明理由．

【答案】(1)；(2)直线的斜率为定值，且定值为.

(1)由题意，则*，*又，

所以椭圆*C*的方程为，代入有，解得，

所以，故椭圆的标准方程为；

(2)由题设易知：，

法一：设直线为，由，消去*y*，整理得，

因为方程有一个根为，所以*M*的横坐标为，纵坐标，故*M*为，用代替*k*，得*N*为，所以，故直线的斜率为定值．

法二：由已知直线的斜率存在，可设直线为，，

由，消去*y*，整理得，

所以，而，

又，代入整理得，

所以，即，若，则直线过点*T*，不合题意，所以．即，故直线的斜率为定值.

**【反思】在本题第（2）问中，在椭圆中：已知椭圆,定点()在椭圆上,设,是椭圆上的两个动点,直线，的斜率分别为,,且满足.则直线的斜率，由于本题是解答题，故不可直接使用此二级结论，但可用该二级结论试探答案，再解答，如果本题是选择题，或者填空题，本题可直接使用此二级结论：.**

4．已知双曲线过点，且离心率．（1）求该双曲线的标准方程；（2）如果，为双曲线上的动点，直线与直线的斜率互为相反数，证明直线的斜率为定值，并求出该定值．

【答案】（1）；（2）证明见解析，6.

【详解】（1）由题意，，，，双曲线的方程为；

（2）设，，，，设的方程为，代入双曲线方程，可得，，

，，，，

同理，．．故得证.

**【反思】在本题第（2）问中，在双曲线:中，定点()在双曲线上,设,是双曲线上的两个动点,直线,的斜率分别为，,且满足.则直线的斜率，由于本题是解答题，故不可直接使用此二级结论，但可用该二级结论试探答案，再解答，如果本题是选择题，或者填空题，本题可直接使用此二级结论：.**