**2023—2024学年第一学期期末试卷**

**高二数学**

**2024.01**

**一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．**

1. 抛物线的准线方程是（ ）

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】结合抛物线的准线方程求解即可.

【详解】由题知抛物线,所以，故抛物线的准线方程为.

故选：A.

2. 在数列中，是其前*n*项和，，（），则（ ）

A.  B. *n*

C.  D. 

【答案】C

【解析】

【分析】由已知条件得是等差数列，由首项和公差，求出和，计算即可.

【详解】数列中，，，所以是首项为3公差为3的等差数列，

则，，.

故选：C

3. 设*a*为正实数，若圆与圆相外切，则*a*的值为（ ）

A. 4 B. 6 C. 24 D. 26

【答案】B

【解析】

【分析】根据题意，分析两个圆的圆心和半径，求出圆心距，由圆与圆的位置关系分析可得答案．

【详解】结合题意：圆的圆心，半径，

圆的圆心，半径，

所以圆心距为，而，

因为两圆相外切，所以，即.

故选：B.

4. 任取一个正整数，若是奇数，就将该数乘3再加上1；若是偶数，就将该数除以2．反复进行上述两种运算，经过有限次步骤后，必进入循环圈1→4→2→1．这就是数学史上著名的“冰雹猜想”（又称“角谷猜想”等）．如取正整数*m*=6，根据上述运算法则得出6→3→10→5→16→8→4→2→1→4→2→1→……．

现给出“冰雹猜想”的递推关系如下：已知数列满足：（*m*为正整数），．当时，使得的最小正整数*n*值是（ ）

A. 17 B. 16 C. 15 D. 10

【答案】B

【解析】

【分析】利用定义依次计算即可.

【详解】时即



.

故选：B

5. 圆关于直线对称后的圆的方程为（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】由题可得圆心关于直线的对称点，半径不变，进而即得.

【详解】圆的圆心 半径为 ，由得，

设圆心关于直线对称点的坐标为，则

，解得,

所以对称圆的方程为.

故选：A.

6. 在平面直角坐标系*xOy*中，已知直线与抛物线交于*A*、*B*两点（异于*O*点），若，则实数*m*的值为（ ）

A. 1 B. 2 C. 4 D. 8

【答案】D

【解析】

【分析】联立方程组，由题意和韦达定理得，可解.

【详解】依题意，设

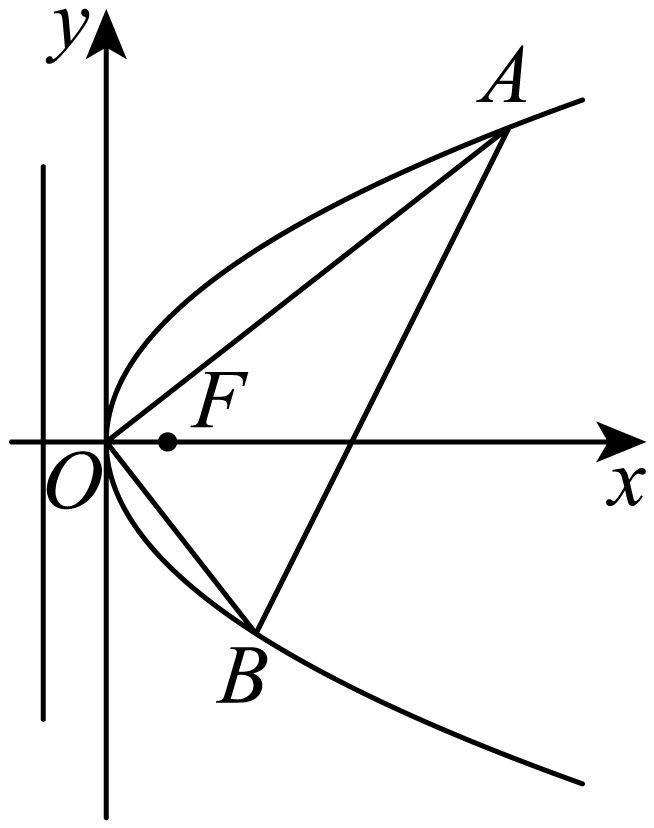
联立方程组，，得，

所以，

因为，即，

解得.

故选：D



7. 若函数在处有极大值，则常数*c*为（ ）

A. 1 B. 3 C. 1或3 D. -1或-3

【答案】B

【解析】

【分析】求出函数的导数，再令导数等于0，求出 值，再检验函数的导数是否满足在处左侧为正数，右侧为负数，把不满足条件的值舍去．

【详解】函数，，

由题意知，在处的导数值为，

，或，

又函数在处有极大值，

故导数值在处左侧为正数，右侧为负数．

当时，，

满足导数值在处左侧为正数，右侧为负数．

当时，，

导数值在处左侧为负数，右侧为正数．

故．

故选：B．

8. 已知圆的一条切线与双曲线*C*：（，）有两个交点，则双曲线*C*离心率的取值范围是（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A

【解析】

【分析】由已知结合点到直线的距离公式，求出圆切线斜率的值，可得出双曲线渐近线的斜率范围，即可求解.

【详解】由可得圆心，半径，

则圆心到切线的距离，

解得：，所以切线方程为，

因为与双曲线有两个交点，

所以，所以，

即双曲线的离心率的取值范围为.

故选：A.

**二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，不选或有错选的得0分．**

9. 已知曲线*C*的方程为（），则下列结论正确的是（ ）

A. 当时，曲线*C*为圆

B. “”是“曲线*C*为焦点在*x*轴上的椭圆”的必要且不充分条件

C. 存在实数*k*使得曲线*C*为双曲线，且离心率为

D. 当时，曲线*C*为双曲线，其渐近线方程为

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据圆锥曲线的标准方程及简单的几何性质，结合充分条件、必要条件的判定方法，逐项判定，即可求解.

【详解】由题意，曲线*C*的方程为（）

对于A中，当时，曲线*C*的方程为，此时曲线*C*表示圆心在原点，半径为的圆，所以是A正确的；

对于B中，当曲线*C*的方程为（），表示焦点在*x*轴上的椭圆，则满足，解得，所以“”是“曲线*C*为焦点在*x*轴上的椭圆”的必要且不充分条件，所以B正确；

对于C中，当曲线*C*的方程为（）表示离心率为的双曲线时，则满足， 无解，所以C不正确；

对于D中，当时，曲线C的方程为（），可得，此时双曲线*C*渐近线方程为，所以D是正确的.

故选：ABD.

10. 已知直线，，则（ ）

A. 直线过定点 B. 当时，

C. 当时， D. 当时，两直线，之间的距离为1

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据直线过定点求法，可判断A,根据直线的一般式在平行满足的条件可判断BC,根据两平行线间距离公式即可求解D.

【详解】解：对A，变形为

令，则，因此直线过定点，A正确；

对于B，当时，，由于，，故两直线不平行，B错误；

对于C，当时，，由于，故两直线平行，C正确；

对于D，当时，则满足，解得，此时，则两直线距离， D正确；

故选：ACD

11. 在数列中，，（），前*n*项和为．则下列结论正确的是（ ）

A.  B. 是等比数列

C. 是等比数列 D. 是递增数列

【答案】ACD

【解析】

【分析】根据题意利用构造法可知数列是以首项为4，公比为2的等比数列，进而可得，进而逐项分析判断.

【详解】因，可得，且，

可知数列是以首项为4，公比为2的等比数列，

可得，即，

则，

且在上单调递增，可知是递增数列，故ACD正确；

因为，显然，可知不是等比数列，故B错误；

故选：ACD.

12. 已知函数的定义域为**R**，其导函数满足，则（ ）

A.  B. 

C.  D. 

【答案】AD

【解析】

【分析】构造函数，利用导数分析函数的单调性，利用函数的单调性逐项判断，可得出合适的选项.

【详解】构造函数，其中，则，

所以，函数为上的减函数，则，即，

所以，，A对B错；

因为，则，即，

所以，，C错D对.

故选：AD.

**三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分．**

13. 在平面直角坐标系*xOy*中，经过两点，的直线倾斜角为45°，则实数*m*的值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】4

【解析】

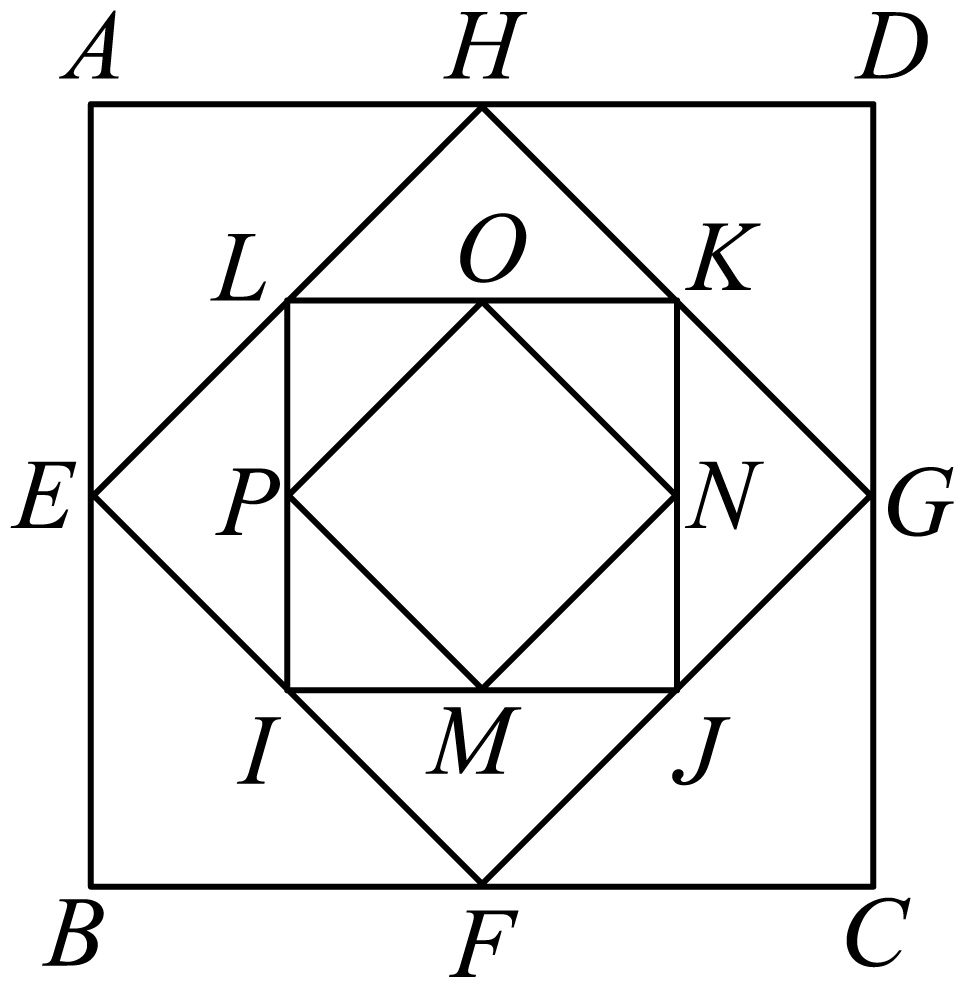
【分析】由直线斜率的定义及由两点坐标求斜率公式即可得到.

【详解】设直线的倾斜角为，则直线的斜率，

又，解得.

故答案为：4.

14. 如图，正方形的边长为2cm，取正方形各边的中点*E*，*F*，*G*，*H*，作第二个正方形，然后再取正方形各边的中点*I*，*J*，*K*，*L*，作第三个正方形，依此方法一直继续下去，如果这个作图过程可以一直继续下去，当操作次数无限增大时，所有这些正方形的面积之和将无限趋近于常数\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



【答案】8

【解析】

【分析】根据题意，正方形边长成等比数列，正方形的面积等于边长的平方可得，然后根据等比数列的前n项和的公式即可求解.

【详解】设第*n*个正方形的边长为，第个正方形的边长为，

即，即数列是首项为，公比为的等比数列，

，故数列是首项为，公比为的等比数列，

*，*

所以如果这个作图过程可以一直继续下去，那么所有这些正方形的面积之和将趋近于8，

故答案为：8.

15. 已知函数在区间上单调递减，则实数*a*的最大值是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

【答案】

【解析】

【分析】依题意，在区间上恒成立，分离常数可得实数*a*的最大值.

【详解】由题意，

因为函数在区间上单调递减，

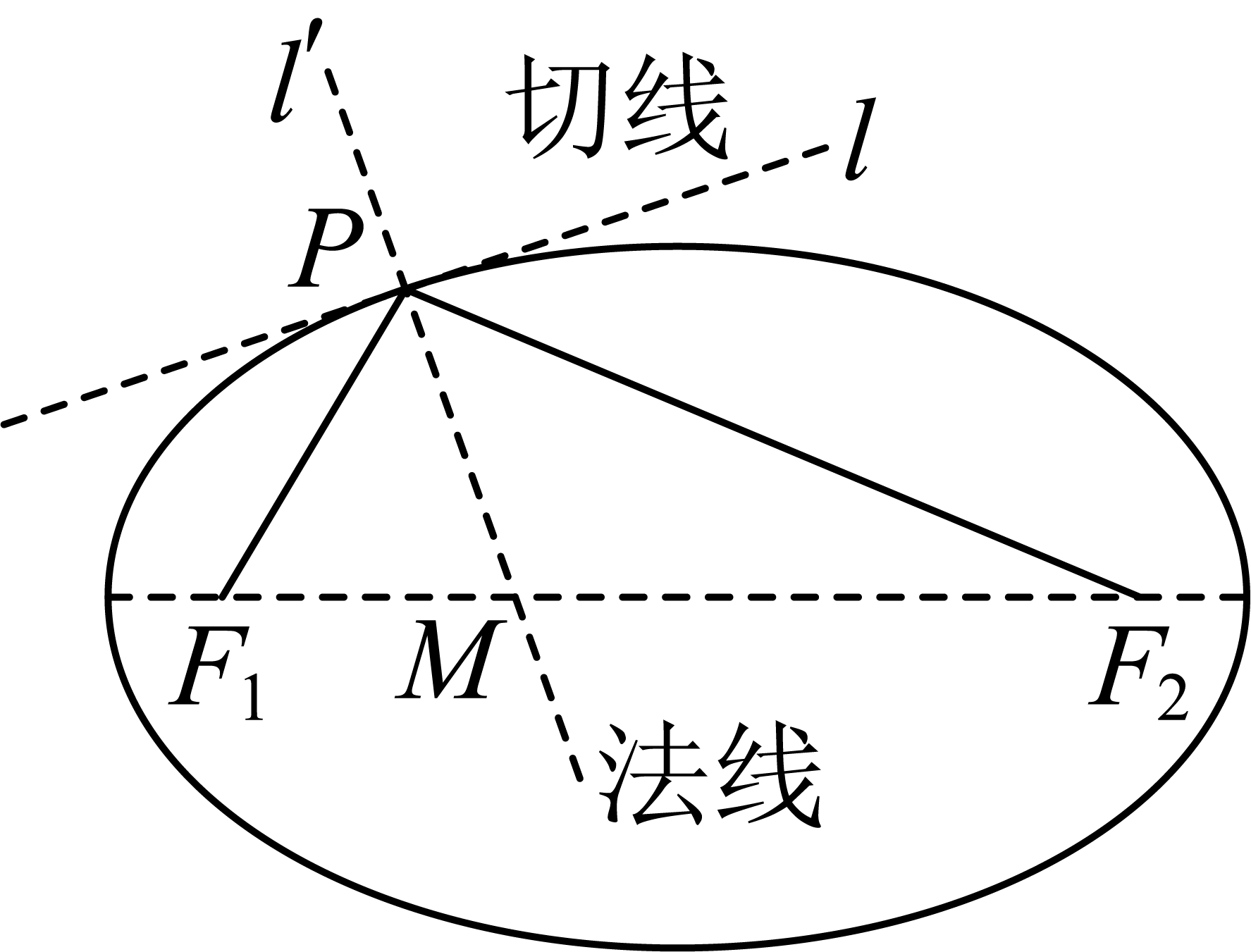
所以在区间上恒成立，

即，又，

所以，即实数*a*的最大值是.

故答案为：

16. 如图所示，由圆锥曲线的光学性质知道：从椭圆的一个焦点出发的光线，经椭圆反射（即经椭圆在该点处的切线反射）后，反射光线经过椭圆的另一个焦点．已知椭圆*C*的方程为，其左、右焦点分别是，，直线*l*与椭圆*C*相切于点，过点*P*且与直线垂直的直线与椭圆长轴交于点*M*，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



【答案】##

【解析】

【分析】由椭圆的光学性质得到直线平分，可得，然后算出答案即可.

【详解】因为直线与椭圆*C*相切于点，所以，解得，

由椭圆*C*的方程为，所以,,

由椭圆的定义可知：，

由椭圆的光学性质得到直线平分，可得.

故答案为：.

**四、解答题：本题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

17. 已知圆*C*经过两点，，且圆心在直线上．

（1）求圆*C*的方程；

（2）过点作直线*l*与圆*C*交于*M*，*N*两点，若，求直线*l*的方程．

【答案】（1）；

（2）或．

【解析】

【分析】（1）设出圆的标准方程，利用待定系数法求解；

（2）根据弦长及圆的半径求出弦心距，据此分直线斜率存在与不存在两种情况求解即可.

【小问1详解】

设圆*C*的方程为，

则，解得，

所以圆*C*的方程为．

【小问2详解】

设圆心到直线*l*的距离为*d*，则，则．

当直线*l*的斜率不存在时，直线*l*：，满足题意；

当直线*l*的斜率存在时，设直线*l*的方程为，即，

所以，解得，

此时，直线*l*的方程为，即．

综上所述，直线*l*的方程为或．

18. 已知函数．

（1）当时，求曲线在点处的切线方程；

（2）若函数有三个不同的零点，求实数*m*的取值范围．

【答案】（1）

（2）．

【解析】

【分析】（1）求出导数，计算出切点及斜率，写出直线方程即可;

（2）利用导数求出单调区间以及极值，要使函数有三个不同的零点，只需满足计算即可.

【小问1详解】

当时，，．

所以，，

所以切线*l*：，即

【小问2详解】



令，得或．

当或时，；当时，．

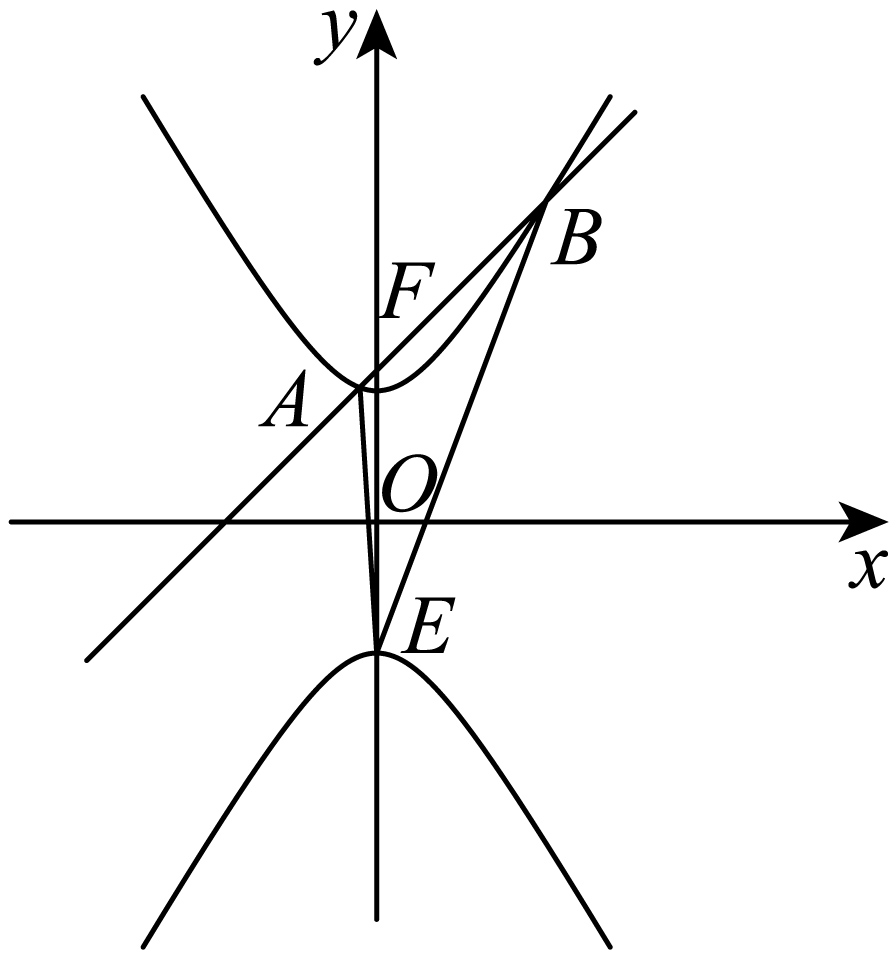
∴的增区间为，；减区间为．

∴的极大值为，的极小值为．

∴，解得：．

此时，，所以函数有三个不同的零点，所以．

19. 对于椭圆：，我们称双曲线：为其伴随双曲线．已知椭圆*C*：（），它的离心率是其伴随双曲线*M*的离心率的倍．



（1）求椭圆*C*伴随双曲线*M*的方程；

（2）如图，点分别为双曲线*M*的下顶点和上焦点，过*F*的直线*l*与*M*上支交于两点，的面积为，求直线的方程．

【答案】（1）;

（2）或.

【解析】

【分析】（1）设椭圆*C*与其伴随双曲线*M*的离心率分别为，，结合离心率关系计算即可；

（2）联立直线与双曲线，借助韦达定理表示出的面积，求出斜率验证取舍即可.

【小问1详解】

设椭圆*C*与其伴随双曲线*M*的离心率分别为，，

依题意可得，，即，即，

解得，

所以椭圆*C*：，则椭圆*C*伴随双曲线*M*的方程为．

【小问2详解】

由（1）可知，，设直线*l*的斜率为*k*，，，

则直线*l*的方程，与双曲线联立并消去*y*得，

则，所以，，

又，

又，

所以，

解得或，

因为直线与双曲线上支交于两点，所以，即，

，即，解得，

所以,

所以直线*AB*的方程为：或.

20. 已知数列是递增的等比数列，前3项和为13，且，，成等差数列，

（1）求数列的通项公式；

（2）数列的首项，其前*n*项和为，且 ，若数列满足，求的前*n*项和．

在如下两个条件中任意选择一个，填入上面横线处，并根据题意解决问题．

①（，）；

②（）．

【答案】（1）

（2）答案见解析

【解析】

【分析】（1）根据等比数列通项公式及等差中项可得结果；

（2）若选①，根据等差数列定义求出的通项公式，再由错位相减法求和可得结果；若选②，根据与的关系求通项，再由等比数列求和公式可得结果.

【小问1详解】

由题意得，可得，，

设递增的等比数列数列的公比为*q*，得，

解得或（舍），则；

所以数列的通项公式为.

【小问2详解】

选①（），可得为首项为1，公差为2的等差数列，

则，

，

则，

，

两式相减可得

，化简可得，

所以的前*n*项和.

选②，

当时，，又，

两式相减可得，则，

可得为首项为1，公比为的等比数列，则；

所以，可得．

所以的前*n*项和.

21. 已知椭圆*C*：（）左，右焦点分别为，，离心率，点在椭圆*C*上．

（1）求椭圆*C*的方程．

（2）若*A*，*B*为椭圆*C*上的两个动点，过且垂直*x*轴的直线平分，证明：直线过定点．

【答案】（1）

（2）证明见解析

【解析】

【分析】（1）根据已知条件列式运算求出可得结果；

（2）由题意直线，的倾斜角互补，即，设出直线的方程与椭圆联立方程组，得到根与系数关系代入运算可得解.

【小问1详解】

因，又，即，

解得，，

故椭圆*C*的方程为．

小问2详解】

证明：由题意可知直线的斜率存在，，

设直线的方程为，

设，，

由，消去得，

则，

，．

设直线，的倾斜角分别为，，

由题意可得，即，

所以，

即，

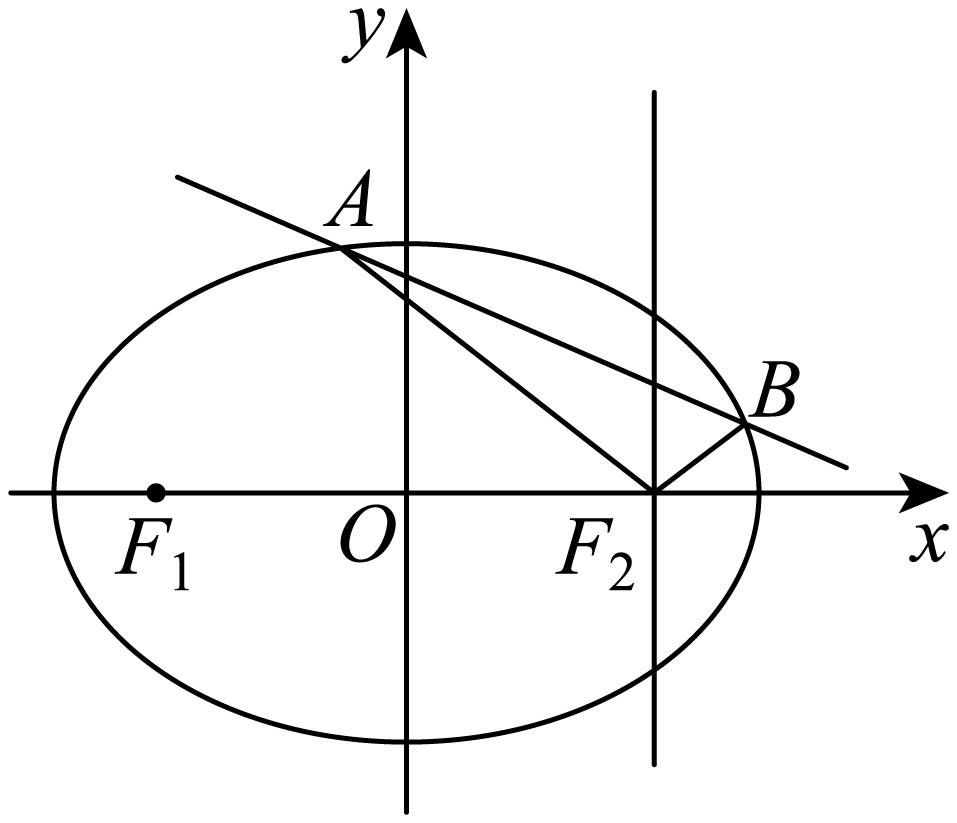
所以，

所以，

化简可得，

所以直线的方程为，

故直线过定点．



【点睛】关键点睛：直线，的倾斜角互补，即，利用根与系数关系代入运算可得解.

22. 已知函数．

（1）若，求函数的增区间；

（2）若不等式对都成立，求实数*a*的取值范围．

【答案】（1）增区间为

（2）或．

【解析】

【分析】（1）利用导数求函数单调性；

（2）利用导数，对实数*a*进行分类，讨论函数的单调性，从而求出在上的最大值，使最大值小于在上恒成立.

【小问1详解】

由题意知的定义域为．

当时，．



令，解得：．

所以的增区间为

【小问2详解】



①当时

当时，；当时，．

所以增区间为，减区间为

∴

由题：，解得：或．

∴或

②当时

当或时，；当时，．

∴为或，，

由题：．

解得：

③当时

在上单调递减

所以成立，故成立

④当时

当或时，；当时，．

∴为或，，

由题：．

解得：

⑤当时

当时，；当时，．

∴为或，，

由题：．

解得：．

综上：或．

【点睛】本题主要方法为利用导数研究函数单调性，以及最值.其中证明不等式恒成立问题，转化为函数最值恒成立问题.