## 4.2.2　对数的运算性质

### 第1课时　对数的运算性质

学习目标　1.掌握积、商、幂的对数运算性质，理解其推导过程和成立条件.2.能熟练运用对数的运算性质进行化简求值．

导语

同学们，数学运算的发展可谓是贯穿了整个人类进化史．从人们对天文、航天、航海感兴趣开始，发现数太大了，天文学家开普勒利用他的对数表简化了行星轨道的复杂计算，对数被誉为“用缩短计算时间而使天文学家延长寿命”，对整个科学的发展起了重要作用．

一、对数的运算性质

问题1　将指数式*M*＝*ap*，*N*＝*aq*化为对数式，结合指数运算性质*MN*＝*apaq*＝*ap*＋*q*能否将其化为对数式？它们之间有何联系(用一个等式表示)?

提示　由*M*＝*ap*，*N*＝*aq*得*p*＝log*aM*，*q*＝log*aN*.

由*MN*＝*ap*＋*q*得*p*＋*q*＝log*a*(*M*·*N*)．

从而得出log*a*(*MN*)＝log*aM*＋log*aN*(*a*>0，*a*≠1，*M*>0，*N*>0)．

问题2　结合问题1，若＝＝*ap*－*q*，又能得到什么结论？

提示　将指数式＝*ap*－*q*化为对数式，得

log*a*＝*p*－*q*＝log*aM*－log*aN*(*a*>0，*a*≠1，*M*>0，*N*>0)．

问题3　结合问题1，若*Mn*＝(*ap*)*n*＝*anp*(*n*∈**R**)，又能有何结果？

提示　由*Mn*＝*anp*，得log*aMn*＝*np*＝*n*log*aM*(*a*>0，*a*≠1，*M*>0，*n*∈**R**)．

知识梳理

对数的运算性质

如果*a*>0，*a*≠1，*M*>0，*N*>0，那么

(1)log*a*(*MN*)＝log*aM*＋log*aN*.

(2)log*a*＝log*aM*－log*aN*.

(3)log*aMn*＝*n*log*aM*(*n*∈**R**)．

注意点：

(1)性质的逆运算仍然成立．

(2)公式成立的条件是*M*>0，*N*>0，而不是*MN*>0，比如式子log2[(－2)·(－3)]有意义，而log2(－2)与log2(－3)都没有意义．

(3)性质(1)可以推广为：log*a*(*N*1·*N*2·…·*Nk*)＝log*aN*1＋log*aN*2＋…＋log*aNk*，其中*Nk*>0，*k*∈**N**\*.

例1　求下列各式的值．

(1)ln e2；(2)log3e＋log3；(3)lg 50－lg 5.

解　(1)ln e2＝2ln e＝2.

(2)log3e＋log3＝log3＝log33＝1.

(3)lg 50－lg 5＝lg ＝lg 10＝1.

反思感悟　对数的化简求值一般是正用或逆用公式，对真数进行处理，选哪种策略化简，取决于问题的实际情况，一般本着便于真数化简的原则进行．

跟踪训练1　求下列各式的值：

(1)log3(27×92)；(2)lg 5＋lg 2；(3)ln 3＋ln ；

(4)log35－log315.

解　(1)方法一　log3(27×92)＝log327＋log392＝log333＋log334＝3log33＋4log33＝3＋4＝7.

方法二　log3(27×92)＝log3(33×34)＝log337＝7log33＝7.

(2)lg 5＋lg 2＝lg(5×2)＝lg 10＝1.

(3)ln 3＋ln ＝ln＝ln 1＝0.

(4)log35－log315＝log3＝log3

＝log33－1＝－1.

二、利用对数的运算性质化简、求值

例2　计算下列各式的值：

(1)(lg 5)2＋2lg 2－(lg 2)2；

(2).

解　(1)原式＝(lg 5)2＋(2－lg 2)lg 2

＝(lg 5)2＋(1＋lg 5)lg 2

＝(lg 5)2＋lg 2·lg 5＋lg 2

＝(lg 5＋lg 2)·lg 5＋lg 2

＝lg 5＋lg 2＝1.

(2)原式＝

＝＝.

反思感悟　对数运算性质的综合应用解题思路

(1)“收”：将同底的两个对数的和(差)合并为积(商)的对数，即公式逆用；

(2)“拆”：将积(商)的对数拆成同底的两个对数的和(差)，即公式的正用；

(3)“凑”：将同底数的对数凑成特殊值，如利用lg 2＋lg 5＝1，进行计算或化简．

跟踪训练2　计算下列各式的值：

(1)lg －lg ＋lg ；

(2)lg 25＋lg 8＋lg 5×lg 20＋(lg 2)2.

解　(1)方法一　原式＝(5lg 2－2lg 7)－×lg 2＋(2lg 7＋lg 5)

＝lg 2－lg 7－2lg 2＋lg 7＋lg 5

＝lg 2＋lg 5＝(lg 2＋lg 5)＝lg 10＝.

方法二　原式＝lg －lg 4＋lg 7

＝lg ＝lg(·)＝lg ＝.

(2)原式＝2lg 5＋2lg 2＋lg 5×(2lg 2＋lg 5)＋(lg 2)2

＝2lg 10＋(lg 5＋lg 2)2＝2＋(lg 10)2

＝2＋1＝3.

三、对数运算性质的综合应用

例3　已知lg 2＝*a*，lg 3＝*b*，则lg ＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　*b*＋3*a*－1

解析　lg ＝lg 12－lg 5

＝lg(3×22)－(1－lg 2)

＝lg 3＋lg 22－1＋lg 2

＝lg 3＋3lg 2－1＝*b*＋3*a*－1.

反思感悟　对数运算性质的综合应用中的求值(或用代数式表示)问题思路

依据对数的运算性质，将真数化为“底数”“已知对数的数”的幂的乘、除，再展开，要注意常用对数中lg 2＋lg 5＝1.

跟踪训练3　用lg *x*，lg *y*，lg *z*表示下列各式：

(1)lg(*xyz*)；(2)lg ；(3)lg ；(4)lg .

解　(1)lg(*xyz*)＝lg *x*＋lg *y*＋lg *z*.

(2)lg ＝lg(*xy*2)－lg *z*＝lg *x*＋lg *y*2－lg *z*＝lg *x*＋2lg *y*－lg *z*.

(3)lg ＝lg(*xy*3)－lg

＝lg *x*＋lg *y*3－

＝lg *x*＋3lg *y*－lg *z*.

(4)lg ＝lg －lg(*y*2*z*)

＝－(lg *y*2＋lg *z*)

＝lg *x*－2lg *y*－lg *z*.

1．知识清单：

(1)对数的运算性质．

(2)利用对数的运算性质化简、求值．

(3)对数运算性质的运用．

2．方法归纳：转化法．

3．常见误区：要注意对数的运算性质的结构形式，易混淆，且不可自创运算法则．

1．(多选)若*a*>0，*a*≠1，*x*>0，*n*∈**N**\*，则下列各式中正确的有(　　)

A．(log*ax*)*n*＝*n*log*ax*

B．log*ax*＝－log*a*

C．(log*ax*)*n*＝log*axn*

D.＝log*a*

答案　BD

解析　根据对数的运算性质log*aMn*＝*n*log*aM*(*M*>0，*a*>0，*a*≠1)知BD正确．

2．2log510＋log50.25等于(　　)

A．0 B．1 C．2 D．4

答案　C

解析　原式＝log5100＋log50.25＝log525＝2.

3．已知lg 3＝*a*，lg 7＝*b*，则lg 的值为(　　)

A．*a*－*b*2 B．*a*－2*b*

C. D.

答案　B

解析　∵lg 3＝*a*，lg 7＝*b*，

∴lg ＝lg 3－lg 49＝lg 3－2lg 7＝*a*－2*b*.

4.＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　2

解析　原式＝＝＝2.

1．log242＋log243＋log244等于(　　)

A．1 B．2 C．24 D.

答案　A

解析　原式＝log24(2×3×4)＝log2424＝1.

2．已知3*a*＝2，那么log38－2log36用*a*表示为(　　)

A．*a*－2 B．5*a*－2

C．3*a*－(1＋*a*)2 D．3*a*－*a*2

答案　A

解析　因为3*a*＝2，所以*a*＝log32，

所以log38－2log36＝log323－2(log32＋1)＝log32－2＝*a*－2.

3．计算lg 2－lg －eln 2等于(　　)

A．－1 B. C．3 D．－5

答案　A

解析　原式＝lg－2＝－1.

4．下列计算正确的是(　　)

A．(*a*3)2＝*a*9

B．log26－log23＝1

C．

D．log3(－4)2＝2log3(－4)

答案　B

解析　由题意，根据实数指数幂的运算，可得(*a*3)2＝*a*6，＝*a*0＝1，

所以A，C不正确；

由对数的运算性质，可得log26－log23＝log2＝log22＝1，所以B正确；

根据对数的化简，可得log3(－4)2＝2log34，

而log3(－4)无意义，所以D不正确．

5．若lg *a*，lg *b*是方程2*x*2－4*x*＋1＝0的两个实根，则*ab*的值等于(　　)

A．2 B. C．100 D.

答案　C

解析　∵lg *a*，lg *b*是方程2*x*2－4*x*＋1＝0的两个实根，

∴由根与系数的关系得lg *a*＋lg *b*＝2，

∴lg(*ab*)＝2，

∴*ab*＝100.

6．(多选)已知*f*(*x*)＝log5*x*，则对任意的*a*，*b*∈(0，＋∞)，下列关系成立的是(　　)

A．*f*(*ab*)＝*f*(*a*)＋*f*(*b*)

B．*f*(*ab*)＝*f*(*a*)*f*(*b*)

C．*f*＝*f*(*a*)＋*f*(*b*)

D．*f*＝*f*(*a*)－*f*(*b*)

答案　AD

解析　∵*f*(*x*)＝log5*x*，*a*，*b*∈(0，＋∞)，

∴*f*(*ab*)＝log5(*ab*)＝log5*a*＋log5*b*

＝*f*(*a*)＋*f*(*b*)，

*f*＝log5＝log5*a*－log5*b*＝*f*(*a*)－*f*(*b*)．

7．lg ＋lg 的值是\_\_\_\_\_\_\_\_．

答案　1

解析　原式＝lg ＝lg 10＝1.

8．若lg *x*＋lg *y*＝2lg(*x*－2*y*)，则＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　4

解析　因为lg *x*＋lg *y*＝2lg(*x*－2*y*)

＝lg(*x*－2*y*)2，

所以

由*xy*＝(*x*－2*y*)2，知*x*2－5*xy*＋4*y*2＝0，

所以*x*＝*y*或*x*＝4*y*.

又*x*>0，*y*>0且*x*－2*y*>0，

所以舍去*x*＝*y*，故*x*＝4*y*，则＝4.

9．已知lg 2＝*m*，lg 3＝*n*，试用*m*，*n*表示.

解　∵lg 2＝*m*，lg 3＝*n*，∴＝＝＝.

10．计算下列各式的值：

(1)log3＋lg 25＋lg 4＋；

(2)2log32－log3＋log38－.

解　(1)原式＝＝－＋2＋2＝.

(2)原式＝2log32－(log325－log39)＋3log32－＝2log32－5log32＋2log33＋3log32－9＝2－9＝－7.

11．已知log*ax*＝2，log*bx*＝1，log*cx*＝4(*a*，*b*，*c*，*x*>0且*a*，*b*，*c*，*x*≠1)，则log*x*(*abc*)等于(　　)

A. B. C. D.

答案　D

解析　*x*＝*a*2＝*b*＝*c*4，所以(*abc*)4＝*x*7，

所以*abc*＝，即log*x*(*abc*)＝.

12．已知*x*log32＝1，则2*x*＋2－*x*的值是(　　)

A．1 B．3 C. D.

答案　D

解析　由*x*log32＝1，可知log32*x*＝1，即2*x*＝3，故2*x*＋2－*x*＝3＋＝.

13．已知函数*f*(*x*)的定义域为**R**且满足*f*(－*x*)＝－*f*(*x*)，*f*(*x*)＝*f*(4＋*x*)，若*f*(1)＝6，则*f*(log2128)＋*f*(log216)等于(　　)

A．6 B．0 C．－6 D．－12

答案　C

解析　因为函数*f*(*x*)的定义域为**R**且满足*f*(－*x*)＝－*f*(*x*)，

所以*f*(0)＝0，*f*(－1)＝－*f*(1)＝－6，

故*f*(7)＝*f*(4＋3)＝*f*(3)＝*f*(－1＋4)

＝*f*(－1)＝－6，

*f*(4)＝*f*(0)＝0，

所以*f*(log2128)＋*f*(log216)

＝*f*(log227)＋*f*(log224)

＝*f*(7)＋*f*(4)＝－6＋0＝－6.

14．已知函数*f*(*x*)＝*a*log2*x*＋*b*log3*x*＋2，且*f*＝4，则*f*(2 023)＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

答案　0

解析　由*f*＝*a*log2＋*b*log3＋2＝4，得－*a*log22 023－*b*log32 023＝2.

∴*a*log22 023＋*b*log32 023＝－2，

∴*f*(2 023)＝*a*log22 023＋*b*log32 023＋2＝－2＋2＝0.

15．设*a*，*b*，*c*为△*ABC*的三边的长，且关于*x*的方程*x*2－2*x*＋log2(*c*2－*b*2)－2log2*a*＋1＝0有两个相等的实数根，那么这个三角形的形状是\_\_\_\_\_\_．

答案　直角三角形

解析　由题意得

*Δ*＝4－4log2(*c*2－*b*2)＋8log2*a*－4＝0，

∴2log2*a*＝log2(*c*2－*b*2)．

∴*a*2＝*c*2－*b*2，故有*a*2＋*b*2＝*c*2.

∴△*ABC*为直角三角形．

16．已知lg 2＝*a*，lg 3＝*b*.

(1)求lg 72，lg 4.5；

(2)若lg *x*＝*a*＋*b*－2，求*x*的值．

解　(1)lg 72＝lg(23×32)＝3lg 2＋2lg 3

＝3*a*＋2*b*；

lg 4.5＝lg ＝2lg 3－lg 2＝2*b*－*a*.

(2)lg *x*＝*a*＋*b*－2＝lg 2＋lg 3－2

＝lg 2＋lg 3＋lg ＝lg ，

所以*x*＝＝0.06.